УДК: 517.977

Позиционное необходимое условие оптимальности для невыпуклых линейных по управлению дискретных динамических задач

Сорокин С.П.

Институт динамики систем и теории управления им. Матросова СО РАН

г. Иркутск, Российская Федерация

1. Постановка задачи. Рассматривается задача дискретного оптимального управления (P):

$$x(t+1) = F\big(t, x(t)\big)u(t),\ \ u(t) \in U,\ \ t \in \Delta = \{0,1,\dots,T\},\ \ x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$J[u] = l\big(x(T)\big) \to \min. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{x} = \{x(t) \in R^n\}_{t=0}^{T}$ и $\boldsymbol{u} = \{u(t) \in R^m\}_{t=0}^{T-1}$ – траектория и управление динамической системы (1), $x(t) = \big(x_1(t), \dots x_n(t)\big)$, $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big)$, матричная функция $F(t,x)$ размерности $(n \times m)$, множество $U \subset R^m$, функция $l(x)\colon R^n \to R$. Указанные объекты удовлетворяют следующим предположениям:

(П1) элементы $f_{ij}(t,x),\ i = 1,\dots,n,\ \ j = 1,\dots m,$ матрицы $F(t,x)$ определены на $\Delta \times R^n$ и дифференцируемы по x;

(П2) множество допустимых значений управлений U компактно;

(П3) целевая функция $l(x)$, определяющая целевой функционал (2), дифференцируема.

Заметим, что к задаче (P) не выдвигаются никакие требования типа выпуклости годографа (вектограммы) системы (1), т.е. множества $V(t,x) = \{F(t,x)u |\ u \in U\}$, традиционные для необходимых условий оптимальности (НУО) в дискретных задачах, являющихся нелинейными по паре аргументов (x,u) [1–4].

2. Позиционный принцип минимума для дискретных систем. В работах [5, 6] предложена серия НУО, обобщенно называемых дискретным позиционным принципом минимума (ДППМ) для класса задач, включающего (P). Эти условия

лишены отмеченного весьма жёсткого предположения, не характерного дискретным управляемым системам динамики.

Примечательно, что ДППМ обладает конструктивным свойством и позволяет строить на его основе итерационные алгоритмы спуска по целевой функции задачи (решать задачи улучшения управления [7]).

Указанные условия оптимальности и соответствующие алгоритмы используют вспомогательные позиционные управления $v(t,x)$, потенциально обеспечивающие улучшения текущей управляемой пары $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$.

3. Проблема выбора позиционного управления спуска. Опуская формулировку ДППМ и описание алгоритмов, перейдём к проблеме построения позиционных управлений $v(t,x)$ в задаче (P). Главным образом оно связано с решением конечномерной задачи оптимизации

$$H\big(t,x,\overline{\psi}(t+1),u\big)=\langle\overline{\psi}(t+1),F(t,x)u\rangle\to\min,\quad u\in U, \tag{3}$$

где $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}(t)\in R^n\}_{t=0}^{T}$ – решение сопряженной системы

$$\overline{\psi}(t)=\frac{\partial}{\partial x}H\big(t,\overline{x}(t),\overline{\psi}(t+1),\overline{u}(t)\big),\quad t=T-1,\dots,0,$$

с условием трансверсальности

$$\overline{\psi}(T)=\frac{\partial}{\partial x}l\big(\overline{x}(T)\big).$$

Введём предположение

(П4) множество допустимых значений управлений имеет вид

$$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_m,$$

где $U_j=[U_j^{min};\,U_j^{max}]$ – отрезки в R, т.е. множество U суть m-мерный параллелепипед.

Тогда задачу (3) можно переписать в виде

$$\langle g(t,x),u\rangle\to\min,\ \ u\in U\,, \tag{3'}$$

с вектор-функцией $g(t,x):=F^T(t,x)\overline{\psi}(t+1)=\big(g_1(t,x),g_2(t,x),\dots,g_m(t,x)\big)$, компоненты которой – функции:

$$g_j(t,x)=\langle(F^T(t,x))_j,\overline{\psi}(t+1)\rangle,\quad j=1,\dots,m.$$

(Здесь в скалярном произведении берётся j-ая строка транспонированной матричной функции F, состоящая из n компонент.)

Таким образом, решение задачи (3') сводится к исследованию серии задач

$$g_j(t,x)u_j \to \min,\ \ u_j \in U_j,\quad j = 1,\dots,m.$$

Каждая из них, в силу линейности, сводится к ответу

$$u_j \begin{cases} = U_j^{min}, & g_j(t,x) > 0, \\ = U_j^{max}, & g_j(t,x) < 0, \\ \in \left[U_j^{min};\ U_j^{max}\right], & g_j(t,x) = 0, \end{cases} \qquad j = 1,\dots,m.$$

Первые два случая значения функций переключения g_j вполне детерминированы при численной реализации итерационного алгоритма ДППМ, однако, последний случай требует внимания (здесь возникает проблема выбора управления), особенно в задачах экономического содержания, для которых характерны магистральные участки (или особые режимы) [7, 8]. Такие участки характеризуются тем, что траектория системы обеспечивает тривиальное значение функции переключения некоторое время. Отметим, что в непрерывных задачах оптимального управления магистрали описываются и характеризуются весьма подробно и полно, чего не сказать о дискретных постановках, которые представляются более подходящими для моделирования многих экономических процессов.

4. Заключение. Можно выделить несколько подходов к решению этой проблемы в случае численной реализации алгоритмов:

1) полагать $u_j(t) = 0$;
2) на каждом шаге алгоритма, в каждой точке разбиения временной оси выполнять перебор значений $u_j(t) \in U_j$ с определенным шагом;
3) при содержательной интерпретации функции переключения $g_j(t,x)$ задавать «ожидаемое» экспертами значение $u_j(t)$;
4) учитывая подходы 2), 3), применять методы теории вероятностей и математической статистики [9] для оценки значений управления.

Список использованной литературы

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
2. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation (Vols. I–II). – Berlin: Springer, 2006.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973. – 255 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
5. Dykhta V., Sorokin S. *Feedback Minimum Principle for Optimal Control Problems in Discrete-Time Systems and Its Applications* // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019). – Cham: Springer, 2019. – P. 449–460. – (Lecture Notes in Computer Science; Vol. 11548).
6. Сорокин С.П. *Необходимые условия оптимальности с обратной связью и нестандартная двойственность в задачах оптимизации дискретных систем* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 62–72.
7. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука; Физматлит, 1997. – 287 с.
8. Дыхта В.А. Оптимальное управление в моделях экономики: учебное пособие. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015. – 100 с.
9. Хамитов Г.П. *Особенности использования модели скользящего упорядочения с поиском прецедентов для имитации векторного случайного процесса* / Г.П. Хамитов, Т.И. Ведерникова, Л.А. Саенко // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). – 2011. – № 6. – С. 198-200.